Master M1 — Mécanique Physique Université Paris 11

— P-MEC-407A —

TEXTES DES TRAVAUX PRATIQUES EXPERIMENTAUX

FIG. 1 – ©Universalleonardo

Année Universitaire 2007-2008

Table des matières

1 Instabilité de Couette Taylor **4**
- 1.1 Objectif . . . 4
- 1.2 L'écoulement de Couette Taylor . . . 4
- 1.3 Stabilité de l'écoulement de base et bifurcations . . . 5
- 1.4 Mode opératoire . . . 6
  - 1.4.1 Dispositif expérimental . . . 6
  - 1.4.2 Acquisition et traitement des images . . . 6
- 1.5 Analyse des résultats . . . 7
  - 1.5.1 Étalonnage du moteur . . . 7
  - 1.5.2 Étude de l'instabilité primaire . . . 7
  - 1.5.3 Étude de l'instabilité secondaire . . . 8
- 1.6 Annexe théorique . . . 8
- 1.7 Bibliographie . . . 9

2 Écoulement turbulent **10**
- 2.1 Objectif . . . 10
- 2.2 L'écoulement en conduite cylindrique . . . 10
  - 2.2.1 Débit . . . 11
  - 2.2.2 Frottements visqueux . . . 12
- 2.3 Description de l'installation . . . 12
- 2.4 Mode opératoire . . . 13
- 2.5 Analyse des résultats . . . 13
  - 2.5.1 Frottement pariétal . . . 13
  - 2.5.2 Profil de vitesse radial . . . 14
  - 2.5.3 Étude du régime turbulent . . . 14
- 2.6 Annexe théorique . . . 15
  - 2.6.1 Lois en régime laminaire . . . 15
  - 2.6.2 Régime turbulent aux bas nombres de Reynolds . . . 15
  - 2.6.3 Régime turbulent aux grands nombres de Reynolds . . . 15
- 2.7 Annexe : tableau de résultats . . . 17

3 Écoulement autour d'une aile **19**
- 3.1 Objectif . . . 19
- 3.2 Caractéristiques d'une aile . . . 19
- 3.3 Forces et moments . . . 20
- 3.4 Coefficients aérodynamiques . . . 22
- 3.5 Décrochage de l'aile . . . 23
- 3.6 Profil de l'aile étudiée . . . 23
- 3.7 Mode opératoire et analyse des résultats . . . 24
- 3.8 Bibliographie . . . 25

A Planimètre et calcul de surfaces **27**
A.1 Principe 27
A.2 Mode d'emploi 28
A.3 Comment ça marche 28
A.4 Bibliographie 29

B Conseils pour la rédaction **30**
B.1 Objectif 30
B.2 Introduction 30
B.3 Figures et tableaux 30
B.4 Calculs 31
B.5 Commentaires 31
B.6 Conclusion 31

Chapitre 1

Instabilité de Couette Taylor

Sommaire

1.1 Objectif 4
1.2 L'écoulement de Couette Taylor 4
1.3 Stabilité de l'écoulement de base et bifurcations 5
1.4 Mode opératoire 6
1.4.1 Dispositif expérimental 6
1.4.2 Acquisition et traitement des images 6
1.5 Analyse des résultats 7
1.5.1 Étalonnage du moteur 7
1.5.2 Étude de l'instabilité primaire 7
1.5.3 Étude de l'instabilité secondaire 8
1.6 Annexe théorique 8
1.7 Bibliographie 9

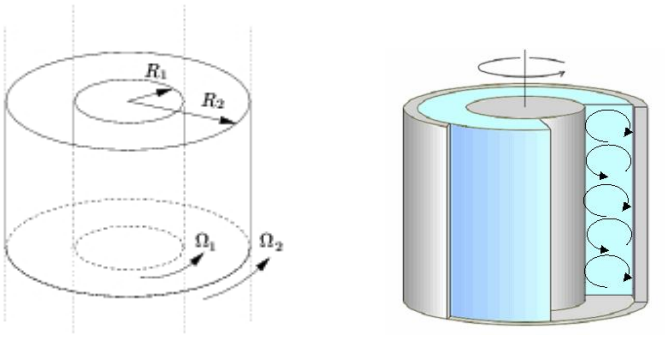
1.1 Objectif

L'objectif de ce TP est de déterminer et caractériser les instabilités primaire et secondaire dans un écoulement de Couette Taylor. Le fluide remplit l'inter-espace entre deux cylindres concentriques, en mouvement de rotation relatif l'un par rapport à l'autre.

1.2 L'écoulement de Couette Taylor

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide confiné entre deux cylindres concentriques, le cylindre intérieur tournante à une vitesse angulaire Ω_1, le cylindre extérieur à la vitesse angulaire Ω_2 (Figure 1.1a). Une géométrie analogue a été utilisée en TP de Rhéologie du L3 de la filière de Mécanique Physique (viscosimètre de Couette pour la mesure des viscosités). Il s'agit d'un cas particulier du dispositif de Couette Taylor (1923), les deux cylindres pouvant dans le cas général tourner dans le même sens ou en sens inverse. Le montage est supposé rigoureusement axisymétrique. Dans la suite, on considérera le cas où la cylindre extérieur est immobile dans le référentiel du hall ($\Omega_2 = 0$, $\Omega_1 = \Omega$).

L'écoulement de Couette Taylor est un cas d'école pour l'étude des instabilités hydrodynamiques et de la transition vers la turbulence. C'est aussi un cas modèle pour l'étude du comportement des films de lubrifiant dans les pièces tournantes (roulements à bille, etc). Pour de petites vitesses angulaires Ω, l'écoulement de base est stationnaire et spatialement uniforme, et caractérisé par une vitesse purement azimutale :



(a) (b)

FIG. 1.1 – a) Dispositif de Couette-Taylor. b) Structure en rouleaux toroïdaux du premier état bifurqué.

$$u_\theta = \frac{R_1\Omega}{\frac{R_2^2}{R_1^2}-1}\left(\frac{R_2^2}{R_1 r}-\frac{r}{R_1}\right), \tag{1.1}$$

qui devient, dans la limite $(R_2 - R_1) \ll R_1$:

$$u_\theta = R_1\Omega\left(1-\frac{r-R_1}{R_2-R_1}\right), \tag{1.2}$$

Au-delà d'une valeur critique Ω_c de la vitesse angulaire, l'écoulement de base devient instable vis-à-vis de rouleaux toriques deux à deux contrarotatifs, qui s'étendent tout autour du cylindre (Figure 1.1b). L'écoulement reste stationnaire et axisymétrique, mais la symétrie de l'état, par translation verticale continue, est brisée. En augmentant encore Ω, l'écoulement structuré devient à son tour instable, pour finalement transiter vers la turbulence.

1.3 Stabilité de l'écoulement de base et bifurcations

La nature de l'instabilité produisant des cellules de Taylor peut se comprendre en considérant un élément de fluide toroïdal (c'est-à-dire le fluide compris entre r et $r + dr$ et entre z et $z + dz$, considérant toutes les valeurs azimutales θ). Supposons que la particule fluide soit légèrement déplacée dans la direction radiale (de r à $r + dr$). Puisque dans ce cas elle tourne plus rapidement que son environnement, le gradient de pression radial associé à l'écoulement de base ne sera pas suffisant pour compenser la force centrifuge induite par ce déplacement. La particule fluide va alors s'écarter un peu plus encore de sa position initiale. Inversement, une particule fluide déplacée vers un rayon légèrement inférieur tendra à se déplacer plus encore vers le cylindre intérieur (instabilité centrifuge). La viscosité, en retour, aura tendance à s'opposer au mouvement de la particule fluide, et donc à restabiliser l'écoulement. Il existe ainsi une compétition centrifuge/viscosité, responsable de l'existence d'une valeur seuil de l'instabilité. Pour comparer les deux effets, centrifuge et visqueux, on construit un nombre de Reynolds basé sur la distance inter-cylindres :

$$Re = \frac{\Omega R_1(R_2-R_1)}{\nu}. \tag{1.3}$$

Dans le cas où l'écart $(R_2 - R_1)$ entre les deux cylindres est très petit devant R_1, l'étude de stabilité linéaire de l'état de base donne pour valeur du nombre de Reynolds critique, pour $\Omega = \Omega_c$ (*cf* Annexe théorique) :

$$Re_c = 41.18\sqrt{\frac{R_1}{R_2-R_1}}. \tag{1.4}$$

Les rouleaux de convection sont d'abord initiés sur les bords haut et bas du cylindre, puis diffusent lentement vers le centre. Plus Re est proche de la valeur critique Re_c, plus la diffusion est lente (ce ralentissement est connu sous la dénomination de **divergence critique**). Il est donc important d'attendre suffisamment longtemps entre deux variations de la tension, afin de laisser le temps à l'instabilité de croître puis de saturer. On introduit le **paramètre de contrôle** adimensionné :

$$\epsilon = \frac{Re - Re_c}{Re_c}. \tag{1.5}$$

Ce paramètre s'annule au seuil ($\epsilon = 0$ lorsque $Re = Re_c$), est positif lorsque $Re > Re_c$, et négatif sinon. L'amplitude de la modulation du champ de vitesse, dans la direction z, augmente avec Re. Au-delà d'une nouvelle valeur critique Ω_s de la vitesse angulaire (Re_s du nombre de Reynolds), une instabilité secondaire se développe sur la structure de rouleaux. Le nouvel état bifurqué est caractérisé par une ondulation spatiale des rouleaux toroïdaux, qui varie au cours du temps (perte de la stationnarité), et brise l'axisymétrie. Ce régime existe en fait sur une plage très étroite du nombre de Reynolds, et se déstabilise à son tour au profit d'un régime de chaos spatio-temporel, dans lequel des défauts topologiques sont continûment créés et annihilés dans les structures de rouleaux.

1.4 Mode opératoire

1.4.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est formé de deux cylindres concentriques de rayons respectifs

$$R_1 = 32,25 \pm 0,04 \text{ mm} \quad R_2 = 35,05 \pm 0,04 \text{ mm}.$$

La rotation du cylindre intérieur est assurée par un moteur à courant continu. La tension aux bornes du moteur est délivrée par une alimentation à courant stabilisé. A chaque vitesse de rotation correspond une tension bien définie, que vous pouvez contrôler à l'aide du voltmètre connecté sur le moteur.

Le liquide qui remplit l'espace libre entre les deux cylindres est composé d'un mélange de glycérol, d'eau et de quelques gouttes de Kalliroscope. Ce dernier est constitué d'eau et d'écailles organiques qui reflètent la lumière et permettent d'observer les structures dans l'écoulement : les molécules, assimilable à des plaquettes, s'alignent parallèlement au champ de vitesse. Leur orientation par rapport à l'observateur modifie l'intensité de la lumière diffusée : le contraste optique révèle donc les zones cisaillées de l'écoulement. Le Kalliroscope modifie très peu la viscosité du mélange. En revanche celle-ci dépend très sensiblement de la température. Le tableau de la Figure 1.2 vous permet de déterminer la viscosité du fluide que vous utiliserez durant votre travail.

Afin de rendre le mélange homogène, désaccoupler les deux cylindres de leur base et secouer le mélange.

1.4.2 Acquisition et traitement des images

Vous avez à votre disposition une caméra CCD et un ordinateur Mac G4 équipé d'une carte d'acquisition d'images et d'un logiciel de traitement d'images du domaine public *ImageJ*. Le logiciel permet de faire des captures d'images, desquelles il est possible d'extraire des profils d'intensité suivant une ligne spatiale. Il permet également de construire des diagrammes spatio-temporels : il s'agit de sélectionner une ligne sur l'image (traversant le plus grand nombre de rouleaux possibles) et de suivre l'évolution de cette ligne en fonction du temps. L'axe horizontal de l'image produite représente alors la ligne d'espace, l'axe vertical le temps. Les niveaux de gris codent l'intensité sur la ligne d'espace.

Viscosity of Aqueous Glycerine Solutions in Centipoises/mPa s

Glycerine percent weight	Temperature (°C) 0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0 [a]	1.792	1.308	1.005	0.8007	0.6560	0.5494	0.4688	0.4061	0.3565	0.3165	0.2838
10	2.44	1.74	1.31	1.03	0.826	0.680	0.575	0.500	–	–	–
20	3.44	2.41	1.76	1.35	1.07	0.879	0.731	0.635	–	–	–
30	5.14	3.49	2.50	1.87	1.46	1.16	0.956	0.816	0.690	–	–
40	8.25	5.37	3.72	2.72	2.07	1.62	1.30	1.09	0.918	0.763	0.668
50	14.6	9.01	6.00	4.21	3.10	2.37	1.86	1.53	1.25	1.05	0.910
60	29.9	17.4	10.8	7.19	5.08	3.76	2.85	2.29	1.84	1.52	1.28
65	45.7	25.3	15.2	9.85	6.80	4.89	3.66	2.91	2.28	1.86	1.55
67	55.5	29.9	17.7	11.3	7.73	5.50	4.09	3.23	2.50	2.03	1.68
70	76	38.8	22.5	14.1	9.40	6.61	4.86	3.78	2.90	2.34	1.93
75	132	65.2	35.5	21.2	13.6	9.25	6.61	5.01	3.80	3.00	2.43
80	255	116	60.1	33.9	20.8	13.6	9.42	6.94	5.13	4.03	3.18
85	540	223	109	58	33.5	21.2	14.2	10.0	7.28	5.52	4.24
90	1310	498	219	109	60.0	35.5	22.5	15.5	11.0	7.93	6.00
91	1590	592	259	127	68.1	39.8	25.1	17.1	11.9	8.62	6.40
92	1950	729	310	147	78.3	44.8	28.0	19.0	13.1	9.46	6.82
93	2400	860	367	172	89	51.5	31.6	21.2	14.4	10.3	7.54
94	2930	1040	437	202	105	58.4	35.4	23.6	15.8	11.2	8.19
95	3690	1270	523	237	121	67.0	39.9	26.4	17.5	12.4	9.08
96	4600	1580	624	281	142	77.8	45.4	29.7	19.6	13.6	10.1
97	5770	1950	765	340	166	88.9	51.9	33.6	21.9	15.1	10.9
98	7370	2460	939	409	196	104	59.8	38.5	24.8	17.0	12.2
99	9420	3090	1150	500	235	122	69.1	43.6	27.8	19.0	13.3
100	12070	3900	1410	612	284	142	81.3	50.6	31.9	21.3	14.8

[a] Viscosity of water taken from "Properties of Ordinary Water-Substance." N.E. Dorsey, p. 184. New York (1940)

FIG. 1.2 – Viscosité dynamique du mélange eau/glycérol, en fonction de la fraction de glycérol (colonne de gauche) et de la température (ligne du haut). N.B. : Les unités de mesure sont des centipoises (CGS) ou des mPa·s (SI). $1\ \text{mPa} \cdot \text{s} = 10^{-3}\ \text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$.

1.5 Analyse des résultats

1.5.1 Étalonnage du moteur

Tracer la courbe $\Omega(V)$ en augmentant lentement la tension V aux bornes du moteur, puis en diminuant la tension. Discuter les éventuelles discontinuités de pente observées sur la courbe. Pouvez-vous en déduire une estimation des seuils de bifurcation ?

1.5.2 Étude de l'instabilité primaire

1. Déterminer à l'oeil le seuil de l'instabilité. Recommencer plusieurs fois par des rampes ascendantes puis descendantes de tension autour de la valeur critique. Trouvez-vous une valeur identique de la tension seuil V_c selon que vous augmentez ou diminuez la tension ? En déduire le Reynolds critique Re_c. Comparer la valeur trouvée à la valeur théorique.
2. En augmentant la tension V aux bornes du moteur, déterminer comment varie le contraste optique A ainsi que la longueur d'onde λ de la structure torique. Tracer la courbe $A^2(\epsilon)$. En déduire la valeur critique Re_c par extrapolation de la valeur de Re lorsque $A = 0$ (*cf* Annexe théorique), et la comparer à celle obtenue à l'oeil. Conclure.
3. Comparer λ à $(R_2 - R_1)$. Conclure.

1.5.3 Étude de l'instabilité secondaire

Le nouvel état n'est plus stationnaire, mais présente une oscillation temporelle à la fréquence $f = 2\pi\omega$. La plage d'existence de cet état est très réduite en nombre de Reynolds Re, on se contentera donc de 3 ou 4 points de mesure.

1. Déterminer l'amplitude A des oscillations en fonction de Re. Mesurer également la manière dont varie la pulsation ω des oscillations en fonction de ϵ.
2. Tracer les courbes A^2 et ω/Ω en fonction de ϵ. Déduire de l'extrapolation de la courbe $A^2(\epsilon)$ à $A = 0$ la valeur seuil (ϵ_s, Re_s) de l'instabilité secondaire.

1.6 Annexe théorique

L'étude de stabilité linéaire d'un état de base consiste à considérer le comportement d'une petite perturbation (d'amplitude infinitésimale) sur l'état de base, ce qui permet de linéariser l'équation d'évolution vis-à-vis de l'amplitude de la perturbation. Pour un écoulement fluide, cette équation est donnée par l'équation de Navier-Stockes, que l'on peut formellement écrire :

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) = F(U, \frac{\partial}{\partial x}, R) \tag{1.6}$$

où x est la coordonnées spatiale (2 ou 3 dimensions), R un paramètre de contrôle (par exemple le nombre de Reynolds). La variation du paramètre de contrôle sera responsable, à partir d'une valeur critique R_c, de la transition d'un état à un autre, qualitativement différent (la transition s'accompagne d'une brisure de symétrie). Pour cela il faut que deux forces antagonistes au moins soient en compétition : lorsque la première prédomine, l'état de base est stable, lorsque la seconde prédomine, l'état de base se déstabilise au profit du nouvel état. En faisant varier R, on joue sur le rapport relatif entre ces deux forces.

On note $U(x,t)$ la solution de base, à laquelle on superpose une petite perturbation $\zeta(x,t) = Ae^{i\omega t}e^{ikx}$, et l'on teste le comportement de la solution $U'(x,t) = U(x,t) + \zeta(x,t)$ dans l'équation 1.6. Pour cela, on linéarise l'équation vis-à-vis de $|\zeta|$, autour de la solution de base U, ce qui conduit à une équation du type :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = L\,\zeta + N(\zeta), \tag{1.7}$$

où L est un opérateur linéaire (représenté par une matrice), et N un vecteur regroupant tous les termes non-linéaires en $|\zeta|$. Pour certaines valeurs du couple (ω, k), l'opérateur L contient des valeurs propres positives : cela signifie que le taux de croissance du mode (ω, k) considéré est positive, et donc que l'amplitude de la perturbation croit exponentiellement au cours du temps (instabilité linéaire). Si en revanche les valeurs propres de L sont négatives pour tout mode (ω, k), alors toutes les perturbations sont amorties, et l'état de base U est stable. Plaçons-nous dans le cas où l'un des modes, (ω_c, k_c), a un taux de croissance nul (stabilité marginale), tous les autres modes étant amortis. On est alors au seuil de l'instabilité. Dans la suite, on supposera que la bifurcation mène vers un état stationnaire, et donc que $\omega = 0$. En augmentant encore légèrement R, le mode est linéairement amplifié. En éliminant dans $N(\zeta)$ les termes non-linéaires résonants avec le mode linéairement instable, on aboutit, à l'ordre non-linéaire le plus bas en A, à une équation d'amplitude dite de Ginzburg-Landau :

$$\tau_0 \frac{\partial A}{\partial t} = \epsilon A - \alpha A^3, \tag{1.8}$$

où ϵ et α dépendent du détail de l'expérience et éventuellement du mode considéré. La forme de l'équation d'amplitude respecte les symétries de la nouvelle structure. Sont ainsi absents les termes en A^2, afin d'assurer l'invariance de la dynamique par le changement $A \to -A$. Lorsque $\alpha > 0$, les non-linéarités saturent le développement de l'instabilité linéaire, et la transition est super-critique (absence d'hystérésis). En revanche, si $\alpha < 0$, le terme en A^3 renforce l'instabilité linéaire, et il faut aller chercher la saturation à l'ordre supérieur, en l'occurrence en A^5. Lorsque $\epsilon < 0$, le terme linéaire conduit déjà à un amortissement de la perturbation, dans ce cas, la solution $A = 0$ (perturbation nulle) est stable. Lorsque $\epsilon > 0$, la perturbation

se développe, jusqu'à ce que le taux de croissance effectif $\sigma = \epsilon - \alpha A^2$ s'annule, ce qui se produit lorsque l'amplitude de la perturbation atteint l'une des deux valeurs :

$$A_{sat} = \pm\sqrt{\frac{\epsilon}{\alpha}}. \tag{1.9}$$

C'est la saturation non-linéaire. Une telle bifurcation est dite *bifurcation fourche*.

Dans le même temps, le temps caractéristique mis par la perturbation pour croître est donné par la solution linéaire $A(t) = A_0 e^{t/\tau}$, avec $\tau = \tau_0/\epsilon$ et A_0 l'amplitude initiale de la perturbation. On voit donc qu'au seuil, lorsque $\epsilon \to 0$, le temps caractéristique diverge : c'est le ralentissement critique. On peut donc assimiler ici $\epsilon = (Re - Re_c)/Re_c$. Physiquement, la dynamique de la perturbation devient très lente en même temps que l'amplitude devient très faible, de sorte qu'il est difficile expérimentalement de mesurer directement le seuil de l'instabilité. En revanche, de l'Eq. (1.9), on voit qu'au voisinage du seuil l'amplitude évolue en $\epsilon^{1/2}$. Il suffit donc d'extrapoler la courbe $A^2_{sat}(R)$ en $A = 0$ pour determiner la valeur critique R_c du paramètre de contrôle ($A_{sat} = 0$ lorsque $\epsilon = 0$ c'est-à-dire $R = R_c$).

Le même raisonnement peut être conduit pour un mode d'instabilité oscillant ($\omega \neq 0$). Dans ce cas, l'amplitude $A = A(t)e^{i\phi(t)}$ est complexe, et l'équation d'enveloppe dite de Ginzburg-Landau complexe s'écrit :

$$\tau_0 \frac{\partial A}{\partial t} = (\epsilon + i\tau_0\omega_0)A - (\alpha + i\alpha')|A|^2 A, \tag{1.10}$$

où les différents paramètres sont réels. La transition de l'état $A = 0$ vers le nouvel état $|A|^2 = \epsilon/\alpha$ est appelée *bifurcation de Hopf*.

1.7 Bibliographie

- D.J. Tritton, "Physical Fluid Dynamics", 2nd edition, 1988, Clarendon Press • Oxford.
- E. Guyon, J.P. Hulin, L. Petit, "Hydrodynamique Physique", 2001, EDP Sciences/CNRS Editions.
- P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal, "L'Ordre dans le Chaos", 1984, Hermann Ed.

Chapitre 2

Écoulement turbulent

Sommaire

2.1 Objectif 10
2.2 L'écoulement en conduite cylindrique 10
2.2.1 Débit 11
2.2.2 Frottements visqueux 12
2.3 Description de l'installation 12
2.4 Mode opératoire 13
2.5 Analyse des résultats 13
2.5.1 Frottement pariétal 13
2.5.2 Profil de vitesse radial 14
2.5.3 Étude du régime turbulent 14
2.6 Annexe théorique 15
2.6.1 Lois en régime laminaire 15
2.6.2 Régime turbulent aux bas nombres de Reynolds 15
2.6.3 Régime turbulent aux grands nombres de Reynolds 15
2.7 Annexe : tableau de résultats 17

2.1 Objectif

L'objectif de ce TP est de caractériser la turbulence d'un écoulement en conduite cylindrique.

2.2 L'écoulement en conduite cylindrique

Lors de l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique lisse, pour des conditions aux limites constantes imposées, Reynolds a montré en 1883, qu'il existe deux sortes de régime suivant la valeur du nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{UD}{\nu}, \tag{2.1}$$

où U et D sont respectivement une vitesse et une dimension caractéristiques ($D = 2r_0$ est le diamètre du tube), et ν la viscosité cinématique du fluide. Lorsque Re est petit, l'écoulement est stationnaire et laminaire : les lignes de courant sont des droites parallèles à l'axe de la conduite. Au contraire, lorsque Re est grand, l'écoulement est instationnaire et turbulent, les lignes de courant évoluent rapidement au cours du temps.

A l'entrée de la conduite, l'écoulement ne s'établit pas immédiatement. Sur une certaine longueur L', appelée *longueur d'entrée*, la répartition des vitesses dans une section droite dépend de la section

considérée ; le gradient $d\overline{p}/dx$ n'est pas encore constant. La longueur d'entrée dépend du régime de l'écoulement (laminaire ou turbulent) et de Re. L'Annexe théorique rappelle les différents cas.

Au cours de cette étude, on supposera l'écoulement de l'air comme incompressible, ce qui est raisonnable tant que les vitesses d'écoulement sont négligeables devant la vitesse du son dans le fluide.

2.2.1 Débit

On décompose le champ de vitesse $\vec{V}$ en une composante moyenne et un champ fluctuant instantané de moyenne nulle. Dans un repère cartésien (x, y, z) :

$$\vec{V}(\vec{r},t) = \begin{cases} \overline{U}(\vec{r}) + u'(\vec{r},t) \\ \overline{V}(\vec{r}) + v'(\vec{r},t) \\ \overline{W}(\vec{r}) + w'(\vec{r},t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \overline{U} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T U(\vec{r},t)\, dt \tag{2.2}$$

En principe l'intégration doit se faire sur une durée T infiniment longue. En pratique, on se contente d'une durée longue devant le temps caractéristique des fluctuations. L'écoulement moyen dans la conduite étant axial, il en résulte que $\overline{V} = \overline{W} = 0$. Dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, x), la symétrie cylindrique impose $\overline{U}(\vec{r}) = \overline{U}(r, x)$. On supposera d'autre part que le profil transverse de vitesse moyenne, en régime turbulent, est indépendant de x suffisamment loin de l'entrée de la conduite : $\overline{U}(\vec{r}) = \overline{U}(r)$. On définit alors les grandeurs suivantes :

– La *vitesse moyenne maximum* U_m, atteinte sur l'axe de symétrie de la conduite :

$$U_m = \overline{U}(r = 0). \tag{2.3}$$

– Le *débit volumique moyen* à travers une section transverse de surface $\mathcal{S}$:

$$\overline{q}_v = \int_{\mathcal{S}} \overline{U}(r)\, dS. \tag{2.4}$$

– La *vitesse moyenne débitante* U_q :

$$U_q = \frac{\overline{q}_v}{S} = \frac{1}{r_0^2} \int_0^{r_0^2} \overline{U}(r)\, d\left(r^2\right). \tag{2.5}$$

– Le *nombre de Reynolds* Re de l'écoulement, défini sur le diamètre du tube :

$$Re = \frac{2 r_0 U_q}{\nu}. \tag{2.6}$$

– Le *nombre de Mach* Ma :

$$Ma = \frac{U_q}{c_s}. \tag{2.7}$$

où c_s est la vitesse du son dans l'air. L'air étant considéré comme un gaz parfait diatomique,

$$c_s = \sqrt{\gamma RT/M}, \tag{2.8}$$

avec
T la température du milieu,
$\gamma = C_p/C_v = 7/5 = 1,4$,
$R = 8,31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$,
$M_{air} = 29 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$.

2.2.2 Frottements visqueux

La viscosité du fluide induit sur les parois de la conduite une *contrainte pariétale* τ_p, responsable d'une *perte de charge* $p_i - p_f$ sur la distance $x_i - x_f$:

$$\tau_p = \frac{p_i - p_f}{x_i - x_f} \frac{r_0}{2}. \tag{2.9}$$

A partir de la contrainte pariétale, on définit les grandeurs suivantes :

– La *vitesse de frottement* :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_{air}}}; \tag{2.10}$$

– Le *nombre de Reynolds de frottement* :

$$Re = \frac{u_\tau r_0}{\nu}; \tag{2.11}$$

– Le *coefficient de frottement* :

$$f = \frac{\tau_p}{\rho_{air} U^2/2}; \tag{2.12}$$

– Le coefficient de perte de charge :

$$\Lambda = 4f. \tag{2.13}$$

2.3 Description de l'installation

Le dispositif expérimental, schématisé sur la Figure 2.1, permet l'étude d'un écoulement d'air en régime turbulent dans une conduite cylindrique lisse de diamètre $D = 2r_0$, jusqu'à des nombres de Reynolds voisins de 200 000. On étudiera ici la répartition des pressions le long du tuyau et la distribution des vitesses dans une section transverse à l'écoulement établi.

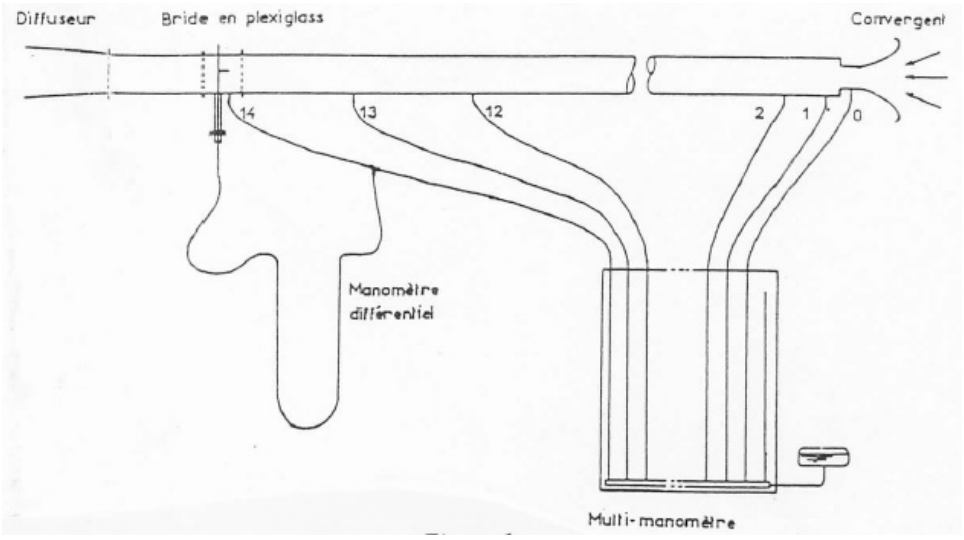


FIG. 2.1 – Schéma de principe de la conduite.

L'installation comprend un tube lisse en laiton étiré de longueur $\ell = 6,45$ m, de diamètre $D = 79,2$ mm, percé de 14 prises de pression statique, réparties de la façon suivante :

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x (cm)	2,54	5,5	10	20	30	50	70	90	110	210	310	410	510	613

L'air est aspiré par un ventilateur centrifuge placé à l'aval du tube. L'entrée d'air s'effectue par un convergent parabolique se raccordant au tube avec un élargissement brusque. Le ventilateur est commandé par un moteur électrique à vitesse variable, il est relié au tube par un diffuseur. À la sortie du ventilateur, l'air est éjecté vers le haut à travers un diaphragme permettant de faire varier la section de sortie. Le réglage de la vitesse de rotation du moteur s'effectue à l'aide d'un autotransformateur dont la plage de réglage est graduée de 0 à 50 Hz.

En aval du tube, à proximité du diffuseur, une bride en Plexiglas munie d'une prise de pression statique et d'une sonde axiale de pression totale, permet l'exploration des pressions totales (et par suite des vitesses) le long d'un diamètre du tube. Toutes les prises de pression statique sont reliées à un capteur capacitif Furness, dont la réponse est linéaire avec la pression. Le capteur est monté dans un pont de Wheastone, et l'unité de lecture est calibrée en mm d'eau.

2.4 Mode opératoire

On effectuera les mesures pour un seul régime qui sera précisé en séance (45 Hz semble convenir). On attendra que la vitesse du moteur soit stabilisée avant de commencer le relevé des mesures. On pourra utiliser ou s'inspirer du tableau de résultats donné en Annexe.

1. Relever les caractéristiques ambiantes : température et pression atmosphériques.
2. En déduire la masse volumique ρ_{air} de l'air dans les conditions du jour. On rappelle que $\rho_0 = 1,293$ kg $\cdot$ m^3 pour l'air dans les conditions normales ($T_0 = 273,15$ K, $p_0 = 101325$ Pa). Dans les autres cas, une correction pourra être nécessaire. En assimilant l'air à un gaz parfait, on a alors : $pV = nRT$, soit :
$$\frac{\rho_{air}}{\rho_0} = \frac{PT_0}{P_0T}.$$
On rappelle que 101325 Pa correspondent à une colonne de 760 mm de mercure.
3. Estimer la viscosité cinématique de l'air, en vous basant sur le tableau suivant :

$T(°C)$	0	20	40
$\nu_{air}(\times 10^{-6}\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$	13,2	15,0	17,0

4. Mise en fonctionnement de l'installation. Suivre les instructions placées sur la commande du moteur.
5. Mesures de pression pariétale : relever les hauteurs h_n de colonne d'eau pour les 14 prises de pression statique.
6. Distribution radiale de vitesse. Mesurer la vitesse en fonction de la position dans le tube, en déplaçant progressivement le tube de Pitot à l'aide du vernier et en relevant pour chaque position la différence $\Delta h(y)$ en hauteur de colonne d'eau entre les prises de pression totale et statique. Il est nécessaire de faire une trentaine de mesures en serrant plus les points près de la paroi (par exemple tous les 0,5 mm près de la paroi puis tous les 1 mm, puis tous les 2 mm près du centre).
7. A la fin des mesures, arrêter le moteur selon les instructions placées sur la commande du moteur.

2.5 Analyse des résultats

2.5.1 Frottement pariétal

1. Tracer la courbe h_n en fonction de x.
2. En déduire la longueur d'entrée L'. Comparer la valeur expérimentale avec les valeurs théoriques données en Annexe théorique pour les régimes laminaire et turbulent. Conclusion ?

3. Calculer la valeur de la contrainte pariétale τ_p moyenne sur tout le tube. En déduire les valeurs de la vitesse de frottement u_τ et du nombre de Reynolds de frottement Re_τ, puis la valeur de la force de frottement F_τ exercée par le fluide sur la longueur du tube.

2.5.2 Profil de vitesse radial

La pression statique et ρ_{air} étant constants dans une section droite, justifier dans quelle mesure on peut écrire :

$$\overline{U} = \sqrt{2g\ \Delta h \frac{\rho_m}{\rho_{air}}}, \tag{2.14}$$

où $\rho_m = 998$ kg·m^3 (le fluide manométrique est de l'eau).

1. Tracer la courbe $\overline{U}$ en fonction de r. Que vaut U_m.
2. Tracer la courbe $\overline{U}$ en fonction de r^2.
3. Intégrer cette dernière pour obtenir la vitesse moyenne débitante de l'écoulement U_q. En déduire le débit volumique moyen $\overline{q}_v$, et le nombre de Reynolds Re associé à l'écoulement.
4. Calculer le nombre de Mach Ma. Vérifier la validité de l'hypothèse d'incompressibilité de l'air.
5. Calculer la valeur des coefficients de frottement f et de perte de charge Λ. Comparer la valeur de Λ à celles déduites des différentes formules empirique ou théorique de Blasius et Prandtl-Karman (*cf* Annexe théorique).

2.5.3 Étude du régime turbulent

Sur un même graphique, représenter (*cf* Annexe théorique) :
– la courbe expérimentale $U(r)/U_m$ en fonction de r ;
– la loi parabolique de Poiseuille (correspondant au régime laminaire) ;
– la loi de Nikuradse en régime turbulent. Déterminer pour cela la valeur de l'exposant n la mieux adaptée à l'écoulement de la conduite.
Conclusion ?

2.6 Annexe théorique

2.6.1 Lois en régime laminaire

Lorsque l'écoulement est laminaire (*cf* TP *Écoulement laminaire* du L3 de Mécanique Physique), le profil de vitesse radial suit la loi parabolique de Poiseuille :

$$\frac{\overline{U}(r)}{U_m} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2. \tag{2.15}$$

On montre aussi que le coefficient de perte de charge est donné par

$$\Lambda = \frac{64}{Re}. \tag{2.16}$$

et la longueur d'entrée, si $D = 2r_0$, par

$$\frac{L'}{D} = 0,03\ Re. \tag{2.17}$$

2.6.2 Régime turbulent aux bas nombres de Reynolds

Lorsque l'écoulement est turbulent, le profil de vitesse n'est plus parabolique. Nikuradse a proposé comme loi empirique :

$$\frac{\overline{U}(r)}{U_m} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^n. \tag{2.18}$$

Cette loi constitue une bonne approximation tant que $(r_0 - r)/r_0 \leq 0,9$. Au-delà, elle ne respecte pas la tangente horizontale nécessaire en $r = 0$. De plus, elle implique que vitesse moyenne débitante et vitesse maximale sur l'axe sont liées par la relation :

$$\frac{U_q}{U_m} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}. \tag{2.19}$$

On a par exemple :

n	6	7	8	9	10
U_q/U_m	0,791	0,817	0,837	0,852	0,865

2.6.3 Régime turbulent aux grands nombres de Reynolds

Dans la limite des grands nombres de Reynolds, la loi de Nikuradse reste valable. Cependant, des considérations théoriques ont permis de proposer une solution asymptotique pour $Re \to \infty$, sans toutefois négliger les termes de viscosité au voisinage de la paroi. L'expérience montre qu'elles sont acceptables dès que $Re_\tau > 150$. Les calculs théoriques n'ont pourtant pas encore permis de déterminer les divers coefficients qui interviennent dans cette solution asymptotique, ni ses zones de validité. Les valeurs données sont ainsi d'origine expérimentale.

Le profil transverse de vitesse est alors supposé se décomposer en trois régions (Figure 2.2) :

1. La **sous-couche visqueuse** (loi linéaire).
   Au contact immédiat de la paroi se développe une sous-couche visqueuse laminaire d'épaisseur

$$\delta = \frac{7,5 r_0}{Re_\tau}. \tag{2.20}$$

   Dans cette zone, la loi de vitesse est linéaire :

$$\frac{\overline{U}(r)}{u_\tau} = \frac{(r_0 - r)u_\tau}{\nu}. \tag{2.21}$$

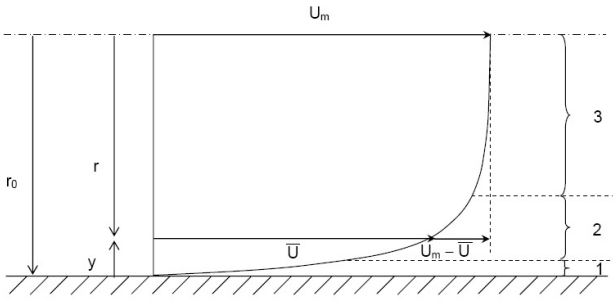


FIG. 2.2 – Profil moyen de vitesse dans la conduite en régime turbulent.

2. **Zone intermédiaire** (loi logarithmique).
   Cette zone est approximativement définie sur l'intervalle :

$$\frac{30}{Re_\tau} \geq \frac{r_0 - r}{r_0} \geq 0,2$$

   ce qui suppose d'emblée $Re_\tau > 150$. Dans cette zone, des considérations semi-théoriques ont permis d'établir, pour le profil radial de vitesse :

$$\frac{\overline{U}(r)}{u_\tau} = 5,65 \ln\left(\frac{(r_0 - r)Re_\tau}{r_0}\right) + 5,6. \tag{2.22}$$

   Entre les zones 1 et 2 ($7,5 < Re_\tau(r_0 - r)/r_0 < 30$) existe une zone de transition mal connue.
3. **Zone centrale** (loi parabolique).
   La dernière zone est définie sur l'intervalle restant : $0,2 \leq (r_0 - r)/r_0 \leq 1$. Dans cette zone, la communauté s'accorde sur une loi parabolique du type :

$$\frac{U_m - \overline{U}(r)}{u_\tau} = 7,6\left(\frac{r}{r_0}\right)^2. \tag{2.23}$$

   Moyennant quelques approximations, on peut établir, pour Re grand, une relation entre la vitesse débitante moyenne et la vitesse maximum sur l'axe :

$$U_q = U_m - 4,44u_\tau. \tag{2.24}$$

Suivant le profil de vitesse choisi, il existe plusieurs formules donnant le coefficient de perte de charge :
– Formule expérimentale de Blasius :

$$\Lambda = 0,3164\ Re^{-1/4} \quad \text{si } Re \leq 10^5 \tag{2.25}$$

– Formule de Prandtl-Karman (déduite des lois logarithmiques) :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 2\sqrt{\Lambda}\ln(Re) - 0.8. \tag{2.26}$$

  Le calcul de Λ, connaissant Re, se fait alors par itérations successives, en prenant pour valeur initiale $\Lambda_0 = 0,02$ (ordre de grandeur classiquement rencontré) :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda_n}} = 2\sqrt{\Lambda_{n-1}}\ln(Re) - 0.8. \tag{2.27}$$

Enfin, la longueur d'entrée se comporte, en régime turbulent, comme

$$\frac{L'}{D} = 0,8\ Re^{1/4}. \tag{2.28}$$

2.7 Annexe : tableau de résultats

Noms :.....

Date :.....

Pression atmosphérique :	$P_a =$ $P_a =$	mm de mercure Pa
Température ambiante :	$T_a =$	°C
Masse volumique ρ_{air} de l'air :	$\rho =$	kg·m^{-3}
Viscosité cinématique ν de l'air ($\times 10^{-6}$m$^2 \cdot$ s) : à 15°C à 20°C à 23°C	 15,0 15,6 15,7	
Masse volumique ρ_{eau} de l'eau pure (kg $\cdot$ m^{-3}) : à 3,8°C à 5°C à 10°C à 15°C à 18°C à 20°C à 25°C à 30°C	 1000 999,99 999,73 999,13 998,62 998,23 997,07 995,67	

Variation axiale de pression

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x (cm)	2,54	5,5	10	20	30	50	70	90	110	210	310	410	510	613
h_n (cm)														

Profil radial de vitesse

y (mm)	Δh (mm)	$\overline{U}$ (m/s)	r (mm)	r^2 (mm^2)	$\overline{U}/U_m$	y/r_0	$(r_0 - r)/r_0$	$y\,Re_\tau/r_0$

Chapitre 3

Écoulement autour d'une aile

Sommaire

3.1 Objectif **19**
3.2 Caractéristiques d'une aile **19**
3.3 Forces et moments **20**
3.4 Coefficients aérodynamiques **22**
3.5 Décrochage de l'aile **23**
3.6 Profil de l'aile étudiée **23**
3.7 Mode opératoire et analyse des résultats **24**
3.8 Bibliographie **25**

3.1 Objectif

L'objectif de ce TP est de déterminer la portance et la traînée d'une aile d'avion, à partir de mesures de pression en différents points de l'aile. On s'attachera à décrire l'évolution de ces deux forces en fonction de l'angle d'attaque du fluide sur l'aile.

3.2 Caractéristiques d'une aile

Le profil d'une aile d'avion est conçu de telle sorte que l'écoulement d'air autour de l'aile engendre une force de portance, verticale et dirigée vers le haut, qui compense le poids de l'avion — lui permettant ainsi de voler. Cette force est engendrée par la différence de pression qui s'établit entre les deux parois de l'aile (Figure 3.1). Dans tout ce qui suit, le repère (x, y, z) est le repère cartésien attaché à l'aile.

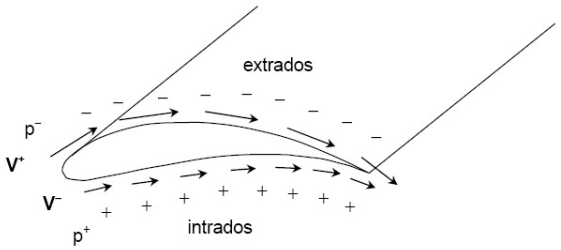


FIG. 3.1 – Distribution de pression et de vitesse autour d'une aile.

On définit pour un profil d'aile dans le plan (x, z) les grandeurs suivantes (Figure 3.2a) :
– c : la corde ;

– e : l'épaisseur ;
– $z(x)$: la ligne de cambrure moyenne ou squelette ;
– U : la vitesse à l'infini amont ;
– α : l'angle d'incidence ;
– s : l'abscisse curviligne.

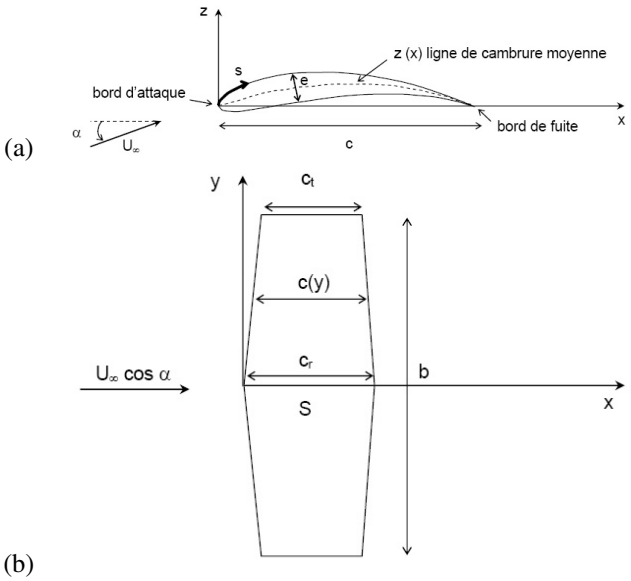


FIG. 3.2 – a) Définition d'un profil. b) Définition d'un profil.

De même, pour l'aile vue de dessus dans le plan (x, y), on définit (Figure 3.2b) :
– b : l'envergure ;
– c_r : la corde en pied ;
– c_t : la corde en bout d'aile ;
– S : la surface alaire.

3.3 Forces et moments

On définit les efforts aérodynamiques suivant (Figure 3.3) :
– A : la force axiale ;
– N : la force normale ;
– R : la force résultante ;
– D : la traînée ;
– L : la portance ;
– M_{BA} : le moment de tangage de bord d'attaque.

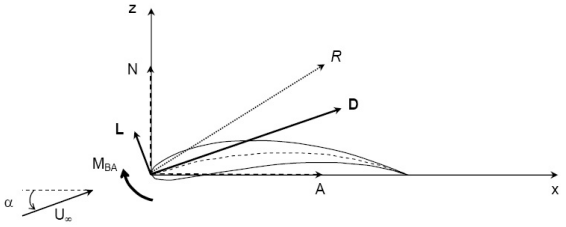


FIG. 3.3 – Efforts aérodynamiques.

On note $p(s)$ la distribution surfacique de pression et $\tau(s)$ la distribution surfacique de frottement par contrainte de cisaillement visqueux, sur l'intrados (indice i) et l'extrados (indice e) du profil (Figure 3.4a).

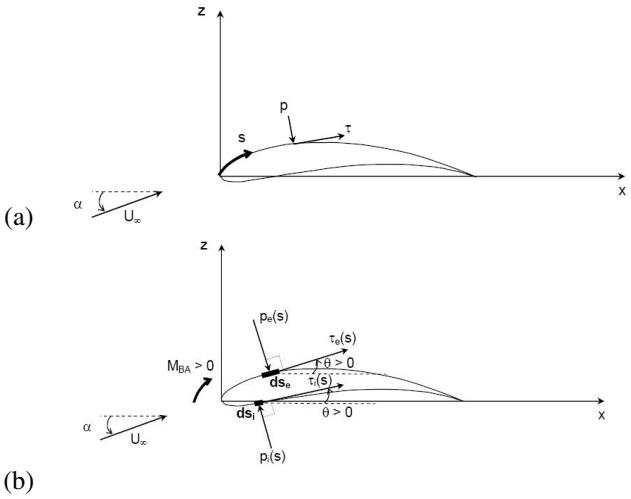


FIG. 3.4 – a) Distribution de pression sur un profil. b) Distribution de pression sur l'intrados et l'extrados.

Examinons les efforts appliqués sur un élément de surface de l'aile, situé côté extrados puis côté intrados (Figure 3.4b) :

– Sur l'extrados, pour un élément ds_e :

$$dN_e = -p_e \cos\theta \, ds_e + \tau_e \sin\theta \, ds_e \tag{3.1}$$
$$dA_e = p_e \sin\theta \, ds_e + \tau_e \cos\theta \, ds_e \tag{3.2}$$

– Sur l'intrados, pour un élément ds_i :

$$dN_i = p_i \cos\theta \, ds_i + \tau_i \sin\theta \, ds_i \tag{3.3}$$
$$dA_i = -p_i \sin\theta \, ds_i + \tau_i \cos\theta \, ds_i \tag{3.4}$$

Les forces normale et axiale totales par unité d'envergure s'obtiennent en intégrant les forces élémentaires côté extrados et intrados entre le bord d'attaque et le bord de fuite :

$$N = \int_{BA}^{BF} (-p_e \cos\theta + \tau_e \sin\theta) \, ds_e + \int_{BA}^{BF} (p_i \cos\theta + \tau_i \sin\theta) \, ds_i \tag{3.5}$$
$$A = \int_{BA}^{BF} (p_e \sin\theta + \tau_e \cos\theta) \, ds_e + \int_{BA}^{BF} (-p_i \sin\theta + \tau_i \cos\theta) \, ds_i \tag{3.6}$$

On en déduit la **portance** L et la **traînée** D :

$$L = N \cos\alpha - A \sin\alpha \tag{3.7}$$
$$D = N \sin\alpha + A \cos\alpha \tag{3.8}$$

Si l'on décompose les forces normale et axiale en une partie provenant de la distribution de pression et une partie provenant de la distribution de frottement :

$$N = N_p + N_\tau \tag{3.9}$$
$$A = A_p + A_\tau \tag{3.10}$$

et identiquement pour la traînée :

$$D = D_p + D_\tau \tag{3.11}$$

où D_p est la **traînée de pression** et D_τ la **traînée de frottement**.
De même que pour les efforts, on peut calculer le moment de tangage au bord d'attaque :
– sur l'extrados, pour un élément ds_e :

$$dM_{BA,e} = (p_e \cos\theta - \tau_e \sin\theta)x\ ds_e + (p_e \sin\theta + \tau_e \cos\theta)z\ ds_e \tag{3.12}$$

– sur l'intrados, pour un élément ds_i :

$$dM_{BA,i} = -(p_i \cos\theta + \tau_i \sin\theta)x\ ds_i + (-p_i \sin\theta + \tau_i \cos\theta)z\ ds_i \tag{3.13}$$

Le moment résultant des efforts appliqués sur le profil, calculé au bord d'attaque est alors :

$$M_{BA} = \int_{BA}^{BF} (dM_{BA,e} + dM_{BA,i}). \tag{3.14}$$

3.4 Coefficients aérodynamiques

Les différents coefficients aérodynamiques sont définis à partir de la pression dynamique :

$$q_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2. \tag{3.15}$$

Les coefficients de pression et de frottement pariétal sont définis en tout point de l'aile :

– le coefficient de pression (au point j) : $C_{p_j} = \frac{p_j - p_\infty}{q_\infty}$;

– le coefficient de frottement : $C_f = \frac{\tau}{q_\infty}$.

Pour une aile complète, on définit les coefficients par rapport à la surface de l'aile :

– le coefficient d'effort axial : $C_A = \frac{A}{q_\infty S}$

– le coefficient d'effort normal : $C_N = \frac{N}{q_\infty S}$

– le coefficient de portance : $C_L = \frac{L}{q_\infty S}$

– le coefficient de traînée : $C_D = \frac{D}{q_\infty S}$

– le coefficient de moment : $C_{M_{BA}} = \frac{M_{BA}}{q_\infty S c}$

On peut alors définir la polaire de l'aile par la courbe $C_L = f(C_D)$. Gustave Eiffel a ainsi nommé cette courbe (Figure 3.5) car si l'on adopte la même échelle sur les deux axes, un point M de la courbe représente en amplitude le coefficient de la résultante aérodynamique et en angle (coordonnées polaires) l'angle formé entre cette résultante et la vitesse de l'écoulement incident.

La finesse f d'un profil ou d'une aile est le rapport entre le coefficient de portance et le coefficient de traînée :

$$f = \frac{C_L}{C_D} = \frac{L}{D}. \tag{3.16}$$

La finesse est fonction de la forme du profil ou de l'aile, mais également de l'angle d'incidence. Pour une aile d'avion, elle est de l'ordre de 25 et atteint 50 pour une aile de planeur. La finesse f correspond aussi au rapport entre la distance parcourue horizontalement et la distance parcourue verticalement pour un vol plané sans vent extérieur.

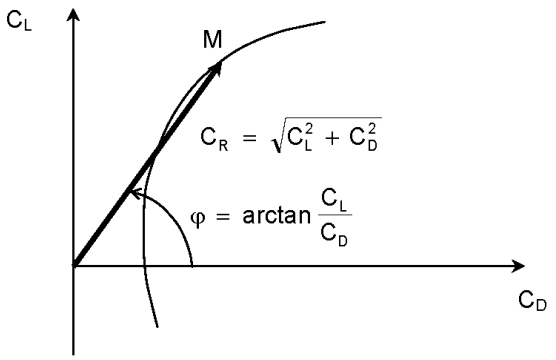


FIG. 3.5 – Polaire d'une aile.

3.5 Décrochage de l'aile

Pour des angles d'incidence α inférieurs à environ 15°, l'écoulement reste attaché sur l'aile. Par contre, pour des angles plus élevés, la viscosité de l'air entraîne le décollement de la couche limite côté extrados et l'apparition d'une zone de recirculation côté extrados, c'est-à-dire un écoulement localement contraire au sens de l'écoulement incident (figure 8). Cet écoulement engendre une surpression de côté extrados et par conséquent une perte de portance : c'est le décrochage de l'aile.

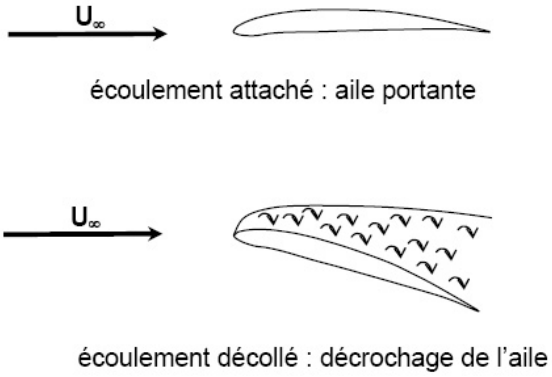


FIG. 3.6 – Écoulement attaché et décollé.

3.6 Profil de l'aile étudiée

Le National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) développa, à partir des années 1930, plusieurs séries de profils très largement utilisés par la suite. Dans le cadre de ce T.P., le profil d'aile étudié est le NACA 23012 (Figure 3.7), un profil de la série à 5 chiffres. Il est muni de 24 prises de pression statique numérotées de 1 à 12 côté extrados et de 13 à 24 côté intrados. L'aile a pour envergure $b = 291$ mm et pour corde $c = 100$ mm. Les coordonnées de l'ensemble de ces prises de pression sont données dans le tableau 3.1.

D'après les notations précédentes, C_{p_e} est le coefficient de pression sur l'extrados et C_{p_i} est le coefficient de pression sur l'intrados. De même l'on désigne par C_{p_1} le coefficient de pression sur la partie amont aux maxima d'épaisseur de l'aile (z_e côté extrados et z_i côté intrados) et C_{p_2} le coefficient de pression sur la partie aval aux maxima d'épaisseur de l'aile (figure 10). Si l'on néglige l'effet du frottement, connaissant la distribution du coefficient de pression C_p sur le profil, on obtient alors les coefficients d'effort axial et d'effort normale :

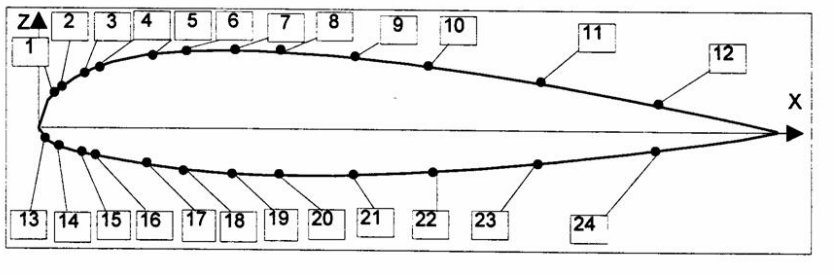


FIG. 3.7 – Profil NACA 23012.

n° prise	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x (mm)	2,2	3,1	6,2	8,3	15,5	20,1	26,7	33,0	43,1	53,0	68,1	84,1
z (mm)	3,4	4,0	5,3	6,0	7,1	7,5	7,7	7,7	7,1	6,3	4,7	2,7
n° prise	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
x (mm)	1,0	2,8	5,8	7,7	14,7	19,6	26,3	32,6	42,7	52,6	67,7	83,7
z (mm)	-1,0	-1,7	-2,3	-2,5	-3,3	-3,8	-4,3	-4,4	-4,3	-4,1	-3,2	-1,9

TAB. 3.1 – Coordonnées des prises de pressions du profil NACA 23012.

$$C_N = \int_0^1 C_{p_i}(x/c)\, d(x/c) - \int_0^1 C_{p_e}(x/c)\, d(x/c) \tag{3.17}$$

$$C_A = \int_{z_1/c}^{z_2/c} C_{p_1}(z/c)\, d(z/c) - \int_{z_1/c}^{z_2/c} C_{p_2}(z/c)\, d(z/c) \tag{3.18}$$

Et l'expression des coefficients de portance et de traînée :

$$C_L = C_N \cos\alpha - C_A \sin\alpha \tag{3.19}$$

$$C_D = C_N \sin\alpha + C_A \cos\alpha \tag{3.20}$$

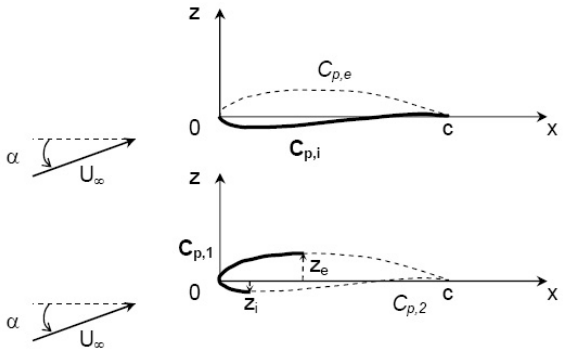


FIG. 3.8 – Distribution de pression pour le calcul des coefficients de portance et de traînée.

3.7 Mode opératoire et analyse des résultats

L'aile est placée dans une soufflerie Deltalab, dont la vitesse d'aspiration peut varier de 0 à 40 m/s. On sélectionnera sur le boîtier de commande la vitesse numérotée 6 (la gamme recouvre des valeurs allant de

1 à 10). La soufflerie est équipée d'un tube Pitot dont la position verticale peut être modifiée. Chacun des 24 capteurs de pression répartis sur l'aile est relié à un boîtier à affichage numérique (Furness Controls Limited), permettant une lecture directe de la pression pariétale, mesurée en mm d'eau, en différents points du profil.

1. Rappeler ce que sont les pressions totale P_T et statique P_S mesurée par le tube de Pitot. Quelle valeur s'attend-on à mesurer pour la pression totale P_T ? Expliquer pourquoi la pression P_T effectivement mesurée (P_T sur la voie 20) est légèrement négative. Justifier que la pression statique P_S doit être très sensiblement inférieure à la pression totale P_T. Est-ce effectivement le cas (P_S sur la voie 20) ? De la mesure de P_T et P_S, déduire la vitesse de l'écoulement incident U_∞ à l'aide du tube de Pitot placé en dehors du sillage de l'aile.
2. Pour le profil NACA 23012 muni des prises de pression, et pour les valeurs = -5°, -2°, $+2^\circ$, $+5^\circ$, $+8^\circ$, $+12^\circ$, $+16^\circ$, $+20^\circ$ de l'angle d'incidence :
   (a) Relever les pressions en mm d'eau pour chacune des prises situées sur l'aile, et calculer en chaque point le coefficient de pression C_{p_j} (h_T et h_S étant respectivement les pressions totale et statique relevées au Pitot exprimées en mm d'eau)
   $$C_{p_j} = \frac{p_j - p_\infty}{q_\infty} = \frac{h_j - h_\infty}{h_T - h_S}; \tag{3.21}$$
   (b) Reporter sur une courbe les différents C_{p_j} obtenus en fonction de x/c, et sur une autre courbe en fonction de z/c. Relier les points afin d'obtenir des courbes fermées semblables à celles schématisées sur la Figure 3.9. On parcourra la courbe des points 13 à 24, puis 12 à 1. Indiquer le sens de parcours sur la courbe.

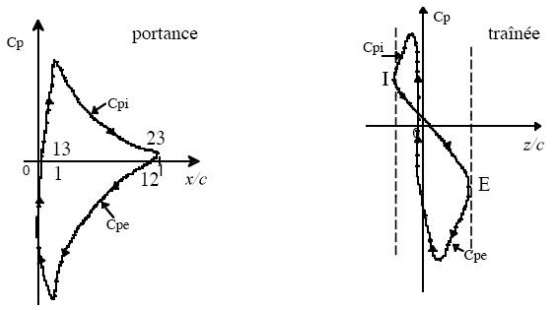


FIG. 3.9 – Courbes $C_p(x/c)$ et $C_p(z/c)$, dont les aires correspondent à C_N et C_A.

   (c) Placer sur la courbe $C_p(x/c)$ les points A et B de l'aile comme indiqués sur la Figure 3.10, et sur la courbe $C_p(z/c)$ les points E et I.
   (d) En négligeant les effets du frottement visqueux, intégrer, soit à l'aide du planimètre, soit en comptant les carreaux sur du papier millimétré, la courbe $C_p(z/c)$ pour obtenir C_A et la courbe $C_p(x/c)$ pour obtenir C_N ;
   (e) En déduire, en fonction de l'angle d'incidence α, les valeurs des coefficients de portance C_L et de traînée C_D.
3. Discuter de l'évolution des coefficients de portance C_L et de traînée C_D en fonction de l'angle d'incidence α.
4. Tracer la polaire de l'aile et commenter les résultats.

3.8 Bibliographie

- T.M. Faure, "Aérodynamique appliquée", Editions Dunod.
- E.A. Brun, A. Martinot-Lagarde, J. Mathieu, "Mécanique des Fluides", Editions Dunod.

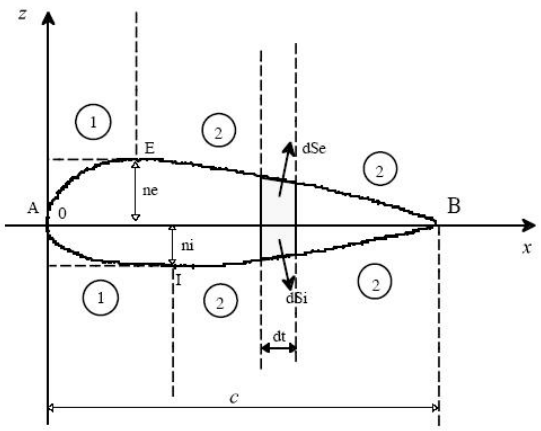


FIG. 3.10 – Points repères de l'aile.

Annexe A

Planimètre et calcul de surfaces

Sommaire

A.1 Principe **27**
A.2 Mode d'emploi **28**
A.3 Comment ça marche **28**
A.4 Bibliographie **29**

A.1 Principe

Un planimètre est un appareil astucieux qui permet de mesurer l'aire d'une surface algébrique plane en parcourant la courbe fermée qui la limite.

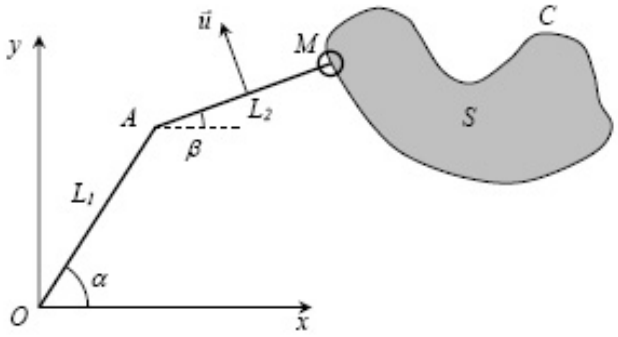


FIG. A.1 – Schéma de principe du planimètre. $\mathcal{S}$ est la surface à mesurer, $\mathcal{C}$ le contour à parcourir pour cela.

L'appareil est schématisé sur la Figure A.1.
- O est un point fixe.
- OA est une tige de longueur L_1, pouvant tourner librement dans le plan autour de O.
- AM est une tige de longueur constante L_2, pouvant tourner librement dans le plan autour du point A.
- M est une loupe qui permet de suivre précisément la courbe ($\mathcal{C}$).

Près de A, solidaire du bras AM, est placé une roue qui, par frottement sur le papier, enregistre les déplacements perpendiculaires à la direction AM. Le déplacement est enregistré par un compteur 10 tours.

A.2 Mode d'emploi

L'appareil mesure une aire algébrique. Par exemple, l'aire trouvée pour un 8 parfait sera zéro. L'aire sera trouvée positive si $\mathcal{C}$ est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre, négative dans l'autre sens[1]. L'aire est mesurée dans une unité arbitraire. Pour connaître la valeur réelle de l'aire mesurée, il est donc nécessaire de préalablement calibrer l'appareil. Pour cela, on parcoure le contour d'une aire de référence, par exemple un carré de côté 1. Un rapport de proportionnalité permet alors de connaître l'aire inconnue dans les unités du problème. On peut avoir une idée de l'erreur commise sur le calcul de l'aire par cette méthode en répétant plusieurs fois la mesure.

A.3 Comment ça marche

Le principe de l'appareil repose sur celui des intégrales curvilignes. Au cours du déplacement de M, α et β varient, et le point A décrit un arc de cercle. Le point O doit ainsi être placé à *l'extérieur* de la courbe $\mathcal{C}$, afin que A ne décrive pas un cercle complet, mais un *aller-retour* sur le même arc de cercle.

Dans le référentiel orthonormé Oxy de la figure, si x et y sont les coordonnées variables du point M, on a pour l'aire S :

$$S = \oint_{\mathcal{C}} x\, dy = -\oint_{\mathcal{C}} y\, dx = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} x\, dy - y\, dx, \tag{A.1}$$

où $\mathcal{C}$ est orienté dans le sens trigonométrique. Les coordonnées du point M sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & L_1 \cos\alpha + L_2 \cos\beta \\ y & = & L_1 \sin\alpha + L_2 \sin\beta \end{array} \right. \tag{A.2}$$

Par différenciation, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dx & = & -L_1 \sin\alpha\, d\alpha - L_2 \sin\beta\, d\beta \\ dy & = & L_1 \cos\alpha\, d\alpha + L_2 \cos\beta\, d\beta \end{array} \right. \tag{A.3}$$

L'expression A.1 devient alors :

$$S = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} \left(L_1(L_1 + L_2\cos(\alpha-\beta))\, d\alpha + L_2(L_2 + L_1\cos(\alpha-\beta))\, d\beta\right) \tag{A.4}$$

Lorsque M parcourt la courbe fermée $\mathcal{C}$, puisque A fait un aller-retour :

$$\oint_{\mathcal{C}} d\alpha = 0, \qquad \oint_{\mathcal{C}} d\beta = 0. \tag{A.5}$$

D'autre part, comme $\sin(\alpha-\beta)$ est une fonction partout définie dans le domaine délimité par $\mathcal{C}$, sur un tour complet :

$$\oint_{\mathcal{C}} d\sin(\alpha-\beta) = 0, \tag{A.6}$$

et donc

$$\oint_{\mathcal{C}} d\cos(\alpha-\beta)\, d\alpha = \oint_{\mathcal{C}} d\cos(\alpha-\beta)\, d\beta, \tag{A.7}$$

de sorte que finalement :

$$S = L_1 L_2 \oint_{\mathcal{C}} \cos(\alpha-\beta)\, d\alpha. \tag{A.8}$$

[1] Dans ce cas, si le compteur marquait 0 au départ, il convient de soustraire 10 au résultat, ou plus simplement de parcourir le contour en sens inverse.

Calculons maintenant le déplacement ℓ enregistré par la roulette, supposée en A. Cette route enregistre la composante des déplacements dans la direction $\vec{u}$, perpendiculairement à la direction de la tige AM. Le déplacement élémentaire de A est :

$$d\overrightarrow{OA} = L_1 \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} d\alpha. \tag{A.9}$$

Le vecteur unitaire $\vec{u}$ ayant pour composantes

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}, \tag{A.10}$$

il vient :

$$\ell = \oint_{\mathcal{C}} (d\overrightarrow{OA}) \cdot \vec{u} = \oint_{\mathcal{C}} L_1 \cos(\alpha - \beta)\, d\alpha, \tag{A.11}$$

et finalement :

$$\ell = \frac{S}{L_2}. \tag{A.12}$$

En réalité, pour des raisons techniques, la roue n'est pas exactement située en A, mais légèrement décalée. On peut montrer que cela ne modifie le résultat qu'à une constante de proportionnalité près. La graduation indiquée par le compteur est donc proportionnelle à ℓ et donc à l'aire S.

A.4 Bibliographie

– J. Bass, "Cours de Mathématiques - Tome I", paragraphe 24-19.

Annexe B

Conseils pour la rédaction

Sommaire

B.1 Objectif **30**
B.2 Introduction **30**
B.3 Figures et tableaux **30**
B.4 Calculs **31**
B.5 Commentaires **31**
B.6 Conclusion **31**

B.1 Objectif

L'objectif du compte-rendu est de permettre à un seul étudiant de refaire l'ensemble du TP, avec l'aide de l'énoncé, en 2 heures au lieu de 4 heures. Pour cela, une rédaction claire est nécessaire. Il est inutile de recopier le texte ou les schémas de l'énoncé.

B.2 Introduction

L'introduction, d'une dizaine de lignes au maximum, doit exposer de façon générale le cadre du TP. Elle ne doit pas reprendre l'introduction de l'énoncé, mais replacer le sujet dans le contexte du cours. Cette partie du compte-rendu doit également mettre en évidence les objectifs des manipulations et les différentes étapes pour y parvenir.

B.3 Figures et tableaux

Les figures doivent présenter les résultats des mesures. Il est toujours préférable de tracer une courbe plutôt que de se contenter d'un tableau de valeurs, qui ne permet pas une bonne interprétation des résultats. Néanmoins les tableaux doivent être joints au compte-rendu pour permettre une vérification des valeurs. La première ligne du tableau comporte les grandeurs mesurées, la seconde ligne les unités. Chaque tableau doit avoir un titre global et un numéro. Par ailleurs, quand une comparaison entre plusieurs séries de mesures, ou une comparaison entre des mesures et une théorie vous est demandée, il faut tracer l'ensemble des résultats sur une même figure. Le choix des échelles doit être dicté par une règle de simplicité : utiliser des graduations régulières multiples de 2 ou de 5 lorsque vous employez une échelle linéaire. De même, lorsqu'une courbe est tracée à la main, il faut choisir un multiple de 2 ou de 5 carreaux. Par exemple, pour représenter des vitesses, on peut prendre 2 carreaux pour 10 m/s ou 5 carreaux pour 10 m/s, mais éviter 3 carreaux pour 10 m/s. Chaque figure doit posséder un titre global et un numéro. Les titres des axes des abscisses et des ordonnées doivent figurer et donner la grandeur représentée, par exemple la vitesse V, ainsi

que son unité, par exemple (m/s). Si la grandeur est sans dimension, il convient de le préciser ( ). Lorsque plusieurs tracés sont reportés sur la même figure, une légende doit identifier les différentes courbes par des symboles, traits ou couleurs différents. Les points de mesures seront représentés sous la forme de symboles (points, croix, carrés, losanges, ...) tandis que les évolutions théoriques ou les résultats de calculs seront représentés par des lignes continues (traits, pointillés, ...). Il ne faut pas hésiter à employer des couleurs pour distinguer les différentes courbes. Les erreurs de mesures seront reportées sous la forme de barres d'erreur sur les points de mesure. Si l'erreur est constante pour tous les points, elle peut être donnée uniquement dans le titre de la figure.

B.4 Calculs

Une calculatrice scientifique est souvent nécessaire pour réaliser les calculs pendant une séance de TP. Néanmoins, il est recommandé de regrouper autant que possible les différents termes numériques d'une expression, puis de les simplifier, avant de faire le calcul numérique. Par exemple :

$$\frac{UD}{\nu} = \frac{12,3 \cdot 2,2 \times 10^{-2}}{15 \times 10^{-6}} = \frac{12,3 \cdot 2,2}{15} \times 10^{-2} \cdot 10^{6} = \frac{4,1 \cdot 2,2}{5} \times 10^{4}.$$

On gagne toujours à exclure du calcul numérique le produit des puissances de 10. Leur produit peut en effet être fait simplement à la main, alors qu'il est fréquemment à l'origine d'erreurs de manipulation sur une calculatrice. Pour éviter un certain nombre d'erreurs dans les conversions d'unité, il est fortement conseillé d'effectuer les applications numériques en utilisant des unités SI. On fera également attention, lorsqu'un développement analytique est demandé, à bien distinguer l'expression littérale de l'application numérique. Vérifier que ces expressions littérales sont homogènes à la grandeur physique recherchée avant de faire l'application numérique. On évitera également d'écrire toutes les décimales d'un résultat : le nombre de décimales doit être représentatif de la précision des mesures (un nombre de Reynolds de 132,23411165 n'a pas beaucoup de sens ; on écrira plutôt $Re = 132$).

B.5 Commentaires

Il faut être précis dans l'emploi du vocabulaire, et utiliser toujours le même terme pour la même grandeur physique, même si cela provoque des répétitions.

Le texte du compte-rendu doit comporter le développement des calculs et les résultats numériques qui sont demandés dans l'énoncé du TP. Chaque figure doit faire l'objet d'un commentaire qui doit commencer par le descriptif des axes et des courbes. Par exemple, "La figure 3 représente l'évolution de la vitesse axiale en fonction de la direction radiale, pour trois débits différents".

On fera également la discussion des écarts qui peuvent apparaître dans la comparaison entre les mesures et la théorie. Les réponses aux questions qui sont posées par le chargé de TP feront l'objet d'un commentaire écrit. Par contre, il est inutile de recopier l'ensemble du texte ou des équations de l'énoncé.

Si l'équivalent français existe, on s'abstiendra d'utiliser des termes anglo-saxons, tels que *shift*, *gap*, *fit*[1], lorsque des équivalents français existent. A moins de décider de rédiger le rapport entièrement en anglais, ce qui peut être un exercice très bénéfique (on s'abstiendra dans ce cas d'y mélanger une terminologie française).

B.6 Conclusion

La conclusion, d'une dizaine de lignes au maximum, a pour but de faire la synthèse de façon concise des principaux résultats obtenus au cours du TP. Les problèmes qui ont été rencontrés en cours de manipulation peuvent être mentionnés à ce niveau. Enfin, on évoquera en une phrase les perspectives ou les applications générales du TP.

[1] Leurs équivalents français étant *déplacement*, *écart*, *ajustement*.